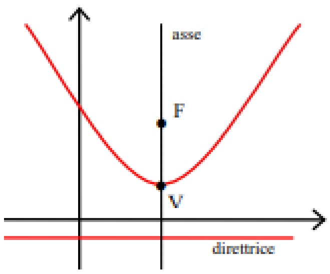
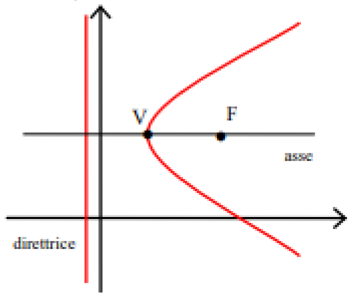
La PARABOLA (aiuto allo studio in geometria analitica)

Scusa la banalità di questa bozza di appunti. Diamo per scontata la conoscenza della geometria analitica delle rette nel piano cartesiano e della circonferenza.
Se una parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto detto FUOCO e da una retta detta DIRETTRICE ... prosegui qui per le formule relative al sottoinsieme di parabole che abbiano asse di simmetria parallelo all'asse y o parallelo all'asse x





- Tenere a portata di mano un **formulario sintetico** per rette, ellissi, parabole, iperboli circonferenze: *qui, ad esempio per le rette*
- *FASCI di parabole* con le *parabole generatrici*[1] del fascio e i *punti base del fascio*
- *desmosCalculator*

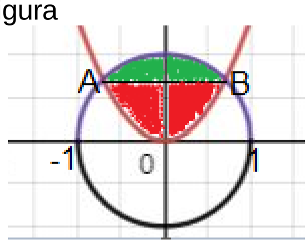
Note in SEGUITO DEL SOMMARIO

[Pagina senza pretese di esaustività o imparzialità, modificata 18/01/2024; col colore grigio distinguo i miei commenti rispetto al testo attinto da altri]

Pagine correlate: matematica apprendimento, e-learning, copertina di Nuova matematica a colori

↑2024.01.18 Considera il fascio di parabole di equazione $y = ax^2 - 2(a-1)x + 1$
Determina i punti base del fascio; scrivi l'equazione cartesiana del luogo dei vertici delle parabole del fascio; traccia il grafico del luogo e verifica che i punti di estremo relativo del grafico del luogo coincidono con i punti base del fascio. [CzzC: qui scarabocchi di svolgimento]

↑2022.04.28 Determina le aree delle *due parti* in cui la parabola di equazione $y = \sqrt{2}x^2$ divide la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
Soluzione. Aiutiamoci con il disegno della parabola (ha vertice nell'origine ed è rivolta verso l'alto) e della circonferenza (ha centro nell'origine e raggio 1). Anche se non usassimo la precisione di disegno di *desmosCalculator*, noteremmo che i punti di intersezione A e B tra la parabola e la circonferenza sono allineati orizzontalmente (hanno la stessa ordinata) perché la figura che abbiamo composto è simmetrica rispetto all'asse y. Cosa si intende per le suddette *due parti*? *Parte1* è la parte di cerchio contenuta nella concavità della parabola rivolta verso l'alto; *parte2* è la restante parte del cerchio. Cercheremo di calcolare l'area della *parte1,* perché poi otterremo facilmente *parte2* = $r^2\pi$ - *parte1.*
Usiamo il segmento AB per dividere la *parte1* in un segmento di parabola (rosso) e in un segmento circolare (verde) come nella seguente figura



$$Area_{parte1} = Area_{segmentoParabolico} + Area_{segmentoCircolare}$$

Per trovare le coordinate dei punti di intersezione (A e B) mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Procediamo per sostituzione (per allenarci sulle abilità di 1ª e 2ª, vediamo entrambe le possibilità)

Prendiamo la y della 1ª eq. e sostituiamo nella 2ª

$$x^2 + \left(\sqrt{2}x^2\right)^2 = 1$$
$$x^2 + 2x^4 - 1 = 0$$
$$ponendo\ x^2 = t \to 2t^2 + t - 1 = 0$$
$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1\ da\ scartare(*) \end{cases}$$

Ricaviamo $x^2 = \frac{y}{\sqrt{2}}$ dalla 1ª equazione e sostituiamo nella 2ª sotto condizione $y \geq 0$ (**)

$$\frac{y}{\sqrt{2}} + y^2 - 1 = 0$$
$$\sqrt{2}y^2 + y - \sqrt{2} = 0$$

(*)perché incompatibile con x^2

$$x^2 = \frac{1}{2} \rightarrow x_{A,B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$sostituendo\ x^2\ nella\ 1^a\ eq \rightarrow y_A = y_B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ce l'aspettavamo che $y_A = y_B$

$$y_{A,B} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2}\ da\ scartare\ (**) \end{cases}$$

Ce l'aspettavamo che $y_A = y_B$

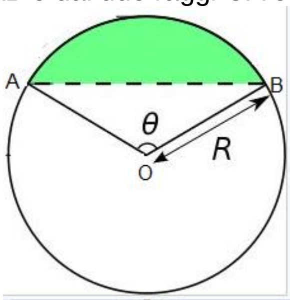
Trovato $y_A = y_B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sostituiamo in $x^2 = \frac{y}{\sqrt{2}}$

$$x^2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow x_{A,B} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ecco dunque le coordinate dei punti di intersezione: $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Dal formulario sappiamo che l'area del segmento parabolico (rosso) è $\frac{2}{3}$ dell'area del rettangolo avente per vertici A, B e le loro proiezioni sulla retta tangente alla parabola nel suo vertice, che nel nostro caso sono rispettivamente i punti $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$: tale rettangolo ha base $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$ e altezza $\frac{\sqrt{2}}{2}$ quindi area $\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2} = 1$ dal che $Area_{segmentoParabolico} = \frac{2}{3}1 = \frac{2}{3}$

Ora andiamo a calcolare l'area del *segmento circolare* (verde), che nel nostro caso è sotteso da un angolo convesso e, quindi, l'area del segmento circolare si trova togliendo dall'area del settore circolare l'area del triangolo formato dalla corda AB e dai due raggi OA e OB.



$$Area_{segmentoCirc} = Area_{settoreCirc} - Area_{triangolo}$$

L'area del settore circolare sarà la quota parte dell'area del cerchio rapportata all'angolo θ

$$Area_{settoreCirc} : r^2\pi = \theta : 360°$$

Nella figura qui sopra ho disegnato un segmento circolare con angolo diverso da quello del nostro problema, apposta per mostrare che la relazione di proporzionalità varrebbe per qualsiasi angolo. Nel nostro caso specifico, invece, abbiamo un angolo θ è di 90°, come si deduce osservando le coordinate dei punti di intersezione; se il problema non fosse così semplice e avessimo un caso più generale dove non si vedesse subito quanto misura l'angolo θ, lo ricaveremmo con la trigonometria dalla relazione $\frac{|AB|}{2} = r\sin\frac{\theta}{2}$ (un cateto = ipotenusa per il sin dell'angolo opposto)

$$\frac{\theta}{2} = arcsin\frac{|AB|}{2r} = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45° \rightarrow \theta = 90°$$

$$Area_{settoreCirc} = \frac{r^2\pi 90°}{360°} = \frac{\pi}{4}$$

Anche per calcolare l'area del triangolo potremmo usare la trigonometria, ma nel nostro caso è un triangolo rettangolo con due cateti =1, quindi $Area_{triangolo} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$

$$Area_{segmentoCirc} = Area_{settoreCirc} - Area_{triangolo} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{Area_{parte1}} = Area_{segmentoParabolico} + Area_{segmentoCircolare} = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}}$$

$$\boldsymbol{Area_{parte2}} = r^2\pi - Area_{parte1} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{6}}$$

↑2020.03.01 data la **parabola** di equazione $y = x^2 - 3x + 2$, determina le rette tangenti nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani e l'area del triangolo individuato da tali rette.

In questa <soluzione.pdf> annoto che, per calcolare l'area del triangolo di cui siano noti i vertici D, E, F, si può ricorrere alle formule della *distanza punto retta*, oppure alla *formula* area = ½ | *det* *M* |
cioè metà del valore assoluto del determinante di M, dove M è la matrice 3x3 formata con le coordinate dei 3 vertici in colonna 1 e due, e mettendo tutti 1 in colonna 3.

$$\begin{matrix} x_D & y_D & 1 \\ x_E & y_E & 1 \end{matrix}$$

$x_F \qquad y_F \qquad 1$

SEGUITO DEL SOMMARIO

Nota1: come trovare i *generatori di un fascio* di parabole $y = f(x, k)$?

Per generatori si intendono le due funzioni generatrici del fascio, solitamente parabole, (eventualmente degeneri nel senso che possono essere anche delle rette)

Scrivere l'equazione del fascio in forma implicita uguagliata a zero raccogliendo per quanto possibile il parametro k: solitamente si arriva alla forma

$$y \pm k\big(f(x)\big) \pm g(x) = 0$$

I due generatori del fascio si trovano in forma implicita scrivendo la suddetta equazione una volta con $k = 0$ e l'altra volta uguagliando a zero l'espressione moltiplicata per k.

Nota2: *equazione dei vertici* di un fascio di parabole