La CIRCONFERENZA (aiuto allo studio in geometria analitica)

Scusa la banalità di questa bozza di appunti. Segnalami eventuali errori, per favore.
Diamo per scontata la conoscenza delle *formule della circonferenza e del cerchio* (dalle medie) e le *definizioni* di corda, arco, semicirconferenza, settore circolare, segmento circolare, quadrante, nonché la geometria analitica delle rette nel piano cartesiano.
Se una circonferenza è il luogo geometrico dei punti (di coordinate x e y) equidistanti r da un centro C di coordinate α e β, dovrà essere che $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$, dal che, sviluppando, otterremo l'equazione generale di una circonferenza

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\text{dove } \alpha=-\frac{a}{2},\quad \beta=-\frac{b}{2},\quad r=\sqrt{a^2+\beta^2-c}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

Due circonferenze di raggio R ed r (R > r) nel piano cartesiano, aventi centri distanti tra loro C_1C_2, potranno essere l'una rispetto all'altra esterne, tangenti esterne, secanti, tangenti interne, interne, concentriche a seconda di come è la distanza dei loro centri rispetto alla somma o alla differenza dei raggi.
Una retta rispetto ad una circonferenza può essere esterna, tangente o secante a seconda che la *distanza tra il centro della circonferenza e la retta* sia maggiore, uguale o minore del raggio.
Nel fascio di rette ($y-y_0=m(x-x_0)$) passanti per un punto (x_0,y_0) non interno ad una circonferenza di data equazione possiamo individuare la/le tangenti con la *formula della distanza punto-retta* imponendola uguale al raggio; possiamo individuare la/le suddette tangenti anche mettendo a sistema l'equazione della circonferenza con l'equazione del suddetto fascio: otterremmo un'equazione di secondo grado dove, imponendo $\Delta=0$, ricaveremmo il/i valore/i di m che individuano le tangenti; tuttavia per trovare le tangenti ad una circonferenza è solitamente più spedito il metodo della distanza punto-retta rispetto al metodo del sistema.
Come determinare l'equazione di una circonferenza quando siano date alcune condizioni?
Ad esempio
- quando siano note le coordinate del centro $C=(x_0;y_0)$ e del raggio r
  basta sviluppare $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$
- al caso precedente si possono ricondurre i casi in cui siano note le coordinate del diametro oppure siano note le coordinate del centro e di un punto della circonferenza;
- quando siano note le coordinate di tre punti della circonferenza non allineati: basta risolvere il sistema delle tre equazioni (nelle tre incognite a,b,c) ottenute inserendo le coordinate dei punti al posto di x e y nell'equazione generale della circonferenza;
- quando siano note le coordinate di due punti P_1e P_2della circonferenza e nota l'equazione di una retta r che contiene il centro: trova l'equazione della retta s che sia asse del segmento P_1P_2 intersecando le due rette (con sistema), troverai le coordinate del centro e di qui prosegui come nei casi precedenti:
- quando siano note le coordinate del centro e l'equazione di una retta tangente: trova la distanza del centro dalla retta e poi prosegui come nei casi precedenti.

<*youmath*> **fascio di circonferenze**, *esercizi svolti*, ad esempio *questo*, metodo dei fasci.

Pagine correlate: geometria analitica apprendimento, e-learning, copertina di Nuova matematica a colori

↑2022.09.06 usare il **metodo dei fasci**
Es.1) per scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta r di equazione y=2x nel suo punto A(1,2) e avente il centro sulla bisettrice del 2° e 4° quadrante. Il problema si può riformulare così: «nel fascio di circonferenze tangenti alla r in A (unico punto base) determina quella il cui centro sta come suddetto».
Soluzione: assumi come generatrici del fascio le due circonferenze degeneri:
- quella che ha centro in A e raggio nullo $(x-1)^2+(y-2)^2=0$
- l'asse radicale del fascio (retta r) $2x-y=0$

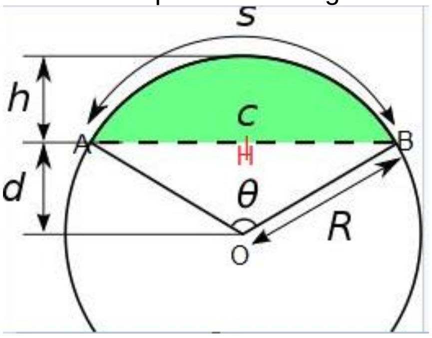
ottenendo l'equazione del fascio $x^2+y^2-2x-4y+5+k(2x-y)=0$.
Ricaviamo le coordinate del centro come $f(k)$ e imponiamo che siano una l'opposto dell'altra onde appartenere alla bisettrice suddetta, dal che ricaveremo che $k=6$, perciò $x^2+y^2+10x-10y+5=0$
Es.2) Usare il metodo dei fasci per scrivere l'equazione della circonferenza passante per A(1,0) e per B(3,0) e che sia tangente all'asse y. Soluzione: una circonferenza generatrice sarà quella di centro C(2,0) e raggio $r=1$ e l'altra sarà l'asse radicale $y=0$, pertanto il fascio sarà

$$(x-2)^2+y^2-1+ky=0$$

Per individuare la circonferenza tangente all'asse y faremo sistema con x=0 e imporremo $\Delta=0$, dal che

$$x^2+y^2-4x\pm2\sqrt{3}y+3=0$$

↑2022.04.28 L'area di un *SEGMENTO CIRCOLARE* è uguale alla differenza tra l'area del settore circolare definito da dall'angolo θ e l'area della porzione triangolare di altezza d.



Se conoscessimo il raggio R e la corda c, potremmo ricavare l'angolo θ (*teorema della corda*) applicando la trigonometria al triangolo rettangolo rettangolo OHA: $\sin\frac{\theta}{2} = \frac{c}{2R}$
Trovato θ potremmo per proporzione con l'angolo giro
- trovare l'area del settore circolare e poi fare la suddetta differenza con l'area del triangolo AOB
- oppure trovare la lunghezza dell'arco s e poi applicare la seguente formula (dimostrabile qui)

$$A_{segm} = \frac{R(s-c)+ch}{2}$$

↑2022.03.16 Verifica che il punto $P(0{,}0)$ appartiene alla circonferenza $x^2+y^2-4x+7y=0$ e scrivi l'equazione della retta r che sia tangente alla circonferenza in P.
Soluzione: sostituendo le coordinate di P alle x e y dell'equazione della circonferenza si vede soddisfatta l'equazione e, dunque, P appartiene alla circonferenza.
Le rette passanti per il suddetto P hanno equazione $y-0=m(x-0)$ cioè $y=mx$.
Mettiamo a sistema tale fascio di rette con l'equazione della circonferenza per trovarne i punti di intersezione
$\begin{cases} x^2+y^2-4x+7y=0 \\ y=mx \end{cases}$ sostituendo avremo $x^2+m^2x^2-4x+7mx=0$

$(1+m^2)x^2+(-4+7m)x=0$ dal che $\Delta = b^2 = (-4+7m)^2$
Imponiamo $\Delta = 0$ per la condizione di tangenza: $-4+7m=0$
dal che $m=\frac{4}{7}$ Dunque la r ha equazione $y=\frac{4}{7}x$

↑2022.03.15 <#30p410> Stabilisci per quali valori di a il punto $P(a, 2-a)$ è interno o appartiene alla equazione $x^2+y^2-2x-2y=0$. Soluzione qui alla data

↑2022.03.14 <#118p418> Un triangolo circoscritto alla circonferenza di equazione
$$x^2+y^2-4x-4y+7=0$$
ha uno dei vertici in A(1,4) mentre il lato che non contiene A è parallelo all'asse x.
Trova le equazioni delle rette contenenti i lati del triangolo e trova l'area del medesimo.
Soluzione qui alla data con due modalità a seconda del criterio di tangenza prescelto: la più rapida è la modalità che impone distanza centro-retta uguale al raggio.

↑2022.03.08 <#44p412> nella circonferenza di equazione $x^2+y^2-4y=0$ determina le coordinate dei vertici del quadrato inscritto nella circonferenza, con i lati paralleli agli assi cartesiani. [CzzC: è un esempio dei problemi per la cui soluzione, se ci aiutiamo fin dall'inizio con un grafico pertinente, possiamo evitare il ricorso a sistemi di equazioni impegnativi. Con le formule in sommario ricaviamo le coordinate del centro C=(0;2) e il raggio r=2;
Soluzione qui alla data

↑2020.01.29 in una <prova di 3ª.nw sono stati assegnati esercizi come in sommario (trova l'equazione di una circonferenza a seconda delle condizioni date) e poi due esercizi di fasci di circonferenze

↑2020.01.29 <pdf> Date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x = 0$ e la retta di equazione $x-y\sqrt{3} = 0$
a) Verifica che la retta stacca sulla circonferenza una corda di misura uguale a quella del lato di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza

b) Determina l'area del minore dei due segmenti circolari limitati dalla circonferenza e dalla corda di cui al punto a).
Ti saranno utili le formule che mettono in relazione il raggio della circonferenza con il lato e l'area del triangolo equilatero inscritto nella medesima:
lato = $r\cdot\sqrt{3}$, area = $\frac{3}{4}r^2\cdot\sqrt{3}$.
Annoto questo esercizio anche perché per la parte a) io otterrei un risultato diverso da quello indicato dal libro di testo.

↑2014.09.03 <pdf> Scrivi l'equazione della circonferenza concentrica alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 -4x +6y -3 = 0$ passante per P(2;-2).
Determina per quali valori di k la retta di equazione $y = x + k$ è esterna rispetto alla parabola di equazione $y = x^2 - x$

↑2013.06.30 determina gli eventuali valori di k per cui l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx + 2(k-2)y + 2k + 4 = 0$ rappresenta una circonferenza con il centro sull'asse delle x.
Soluzione: occorrerebbe che il coefficiente della y sia zero, quindi $k = 2$ ma con tale valore di k prova a vedere come sarebbe il raggio ...; troveresti che sarebbe negativo, quindi "per nessun valore di k quella equazione può rappresentare una circonferenza con il centro sull'asse delle x."

↑2012.03.08 < Due circonferenze di raggio R ed r (R > r) nel piano cartesiano, aventi centri distanti tra loro C_1C_2, potranno essere l'una rispetto all'altra
- esterne se $C_1C_2 > R + r$
- tangenti esterne se $C_1C_2 = R + r$
- secanti se $R - r < C_1C_2 < R + r$
- tangenti interne se $C_1C_2 = R - r$
- interne se $C_1C_2 < R - r$
- concentriche se $C_1C_2 = 0$

Sono condizioni abbastanza intuitive:
- esterne se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi
- tangenti esterne se la distanza dei centri è uguale alla somma dei raggi
- secanti se la distanza dei centri è compresa tra la differenza e la somma dei ravggi
- tangenti interne se la distanza dei centri è uguale alla differenza dei raggi
- interne se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi
- concentriche, ovviamente, se la distanza dei centri è uguale a zero.